

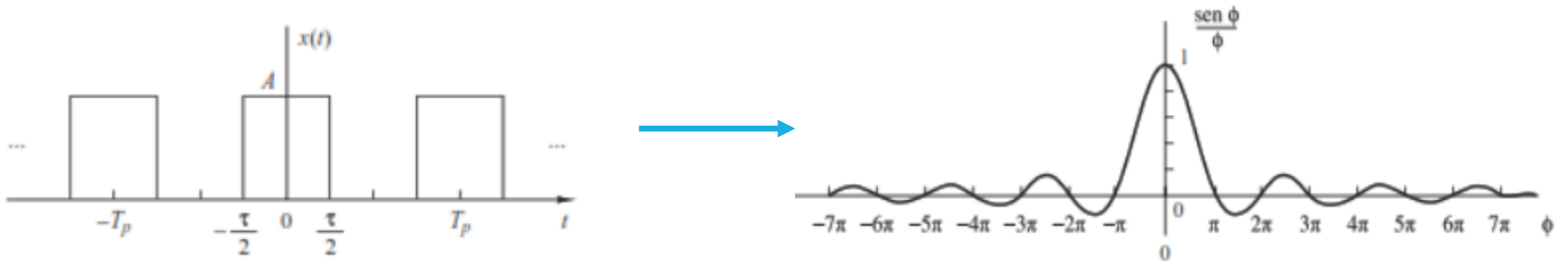
TRANSFORMADA DE FOURIER

CAPÍTULO 4 PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

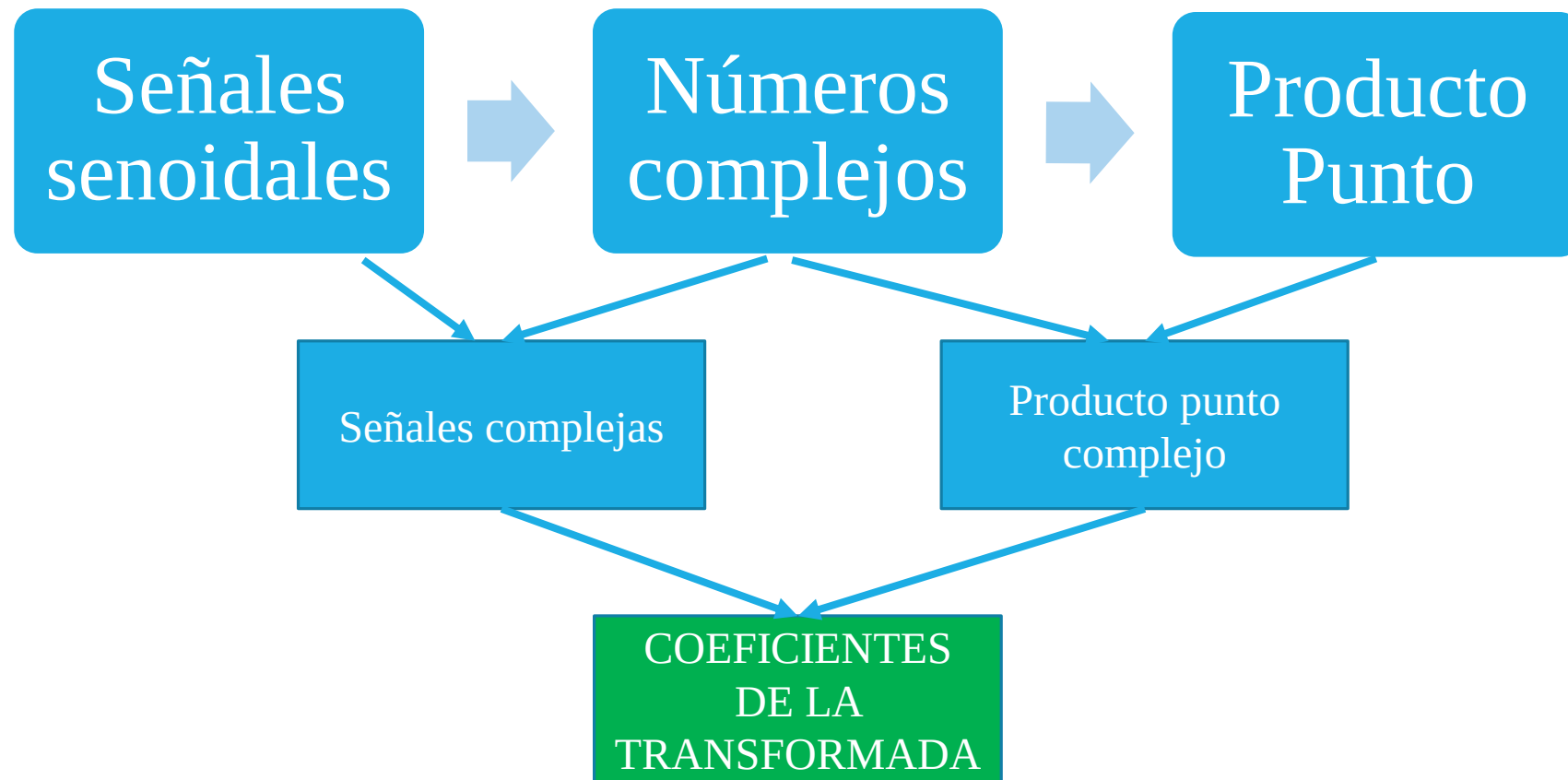


4. Introducción

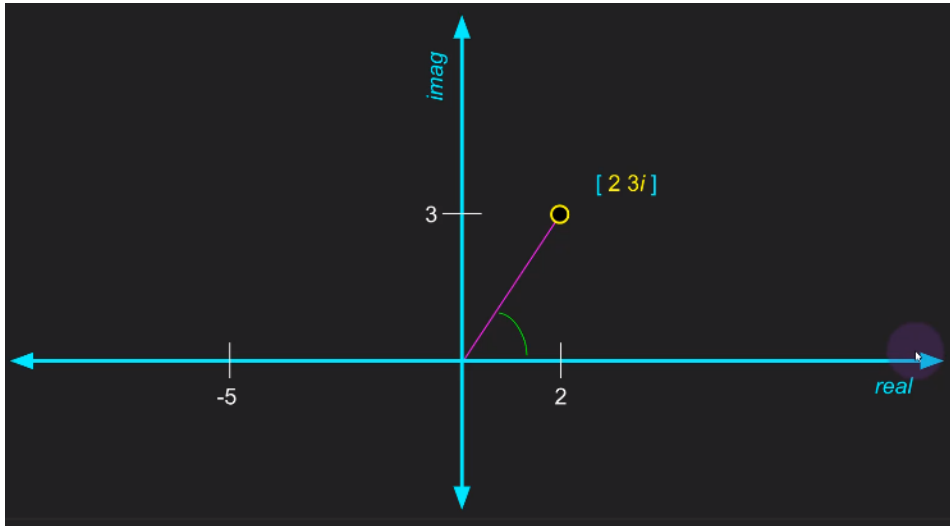
El principal objetivo de la transformada discreta de Fourier es la conversión de una señal en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.



4.1 Fundamentos necesarios



4.1.1 Números complejos



$$z = 2 + 3i$$

$$z_1 = 4 + 2i$$

$$z = 3.6 \mid 56,30^\circ$$

$$z_1 = 4,47 \mid 26,56^\circ$$

$$\text{*Sumar} = z + z_1 = (2+4) + i(3i+2i)$$

$$\text{*Restar} = z - z_1 = (2+4) - i(3i+2i)$$

$$\text{*Multiplicar} = z * z_1 =$$

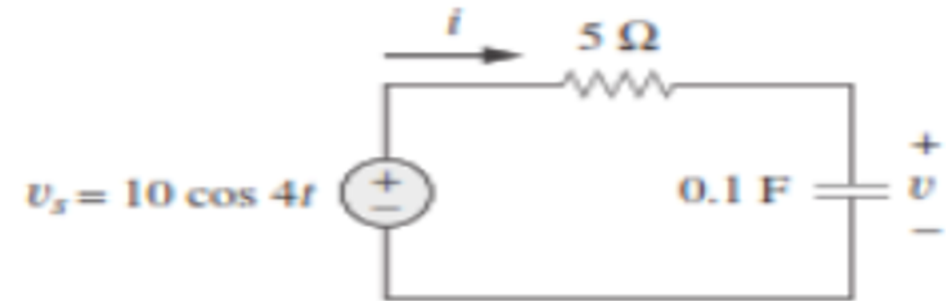
$$(3.6)(4.47) \mid 56.30^\circ + 25.56^\circ$$

$$\text{*Dividir} = z / z_1 = 3.6 / 4.47 \mid 56.30 - 25.56$$

4.1.2 Señales senoidales complejas

Representación en el dominio temporal	Representación en el dominio fasorial
$V_m \cos(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi$
$V_m \sin(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi - 90^\circ$
$I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta$
$I_m \sin(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta - 90^\circ$

Elemento	Dominio temporal	Dominio de frecuencia
R	$v = Ri$	$V = RI$
L	$v = L \frac{di}{dt}$	$V = j\omega LI$
C	$i = C \frac{dv}{dt}$	$V = \frac{I}{j\omega C}$



4.1.3 Fórmula de Euler

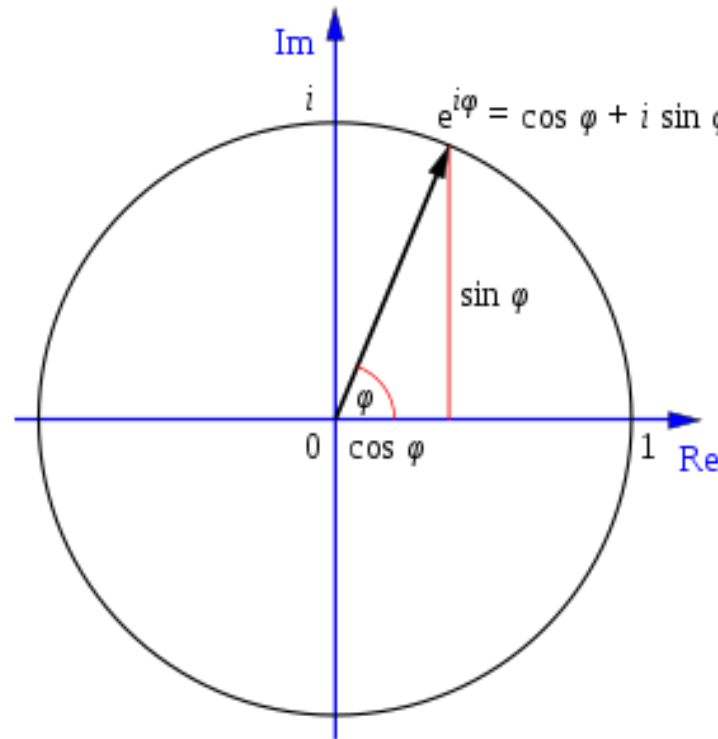
$$e^{-i\pi} + 1 = 0$$

$$e^{-ik} = \cos(k) + i\sin(k)$$

$$me^{-ik} = m[\cos(k) + i\sin(k)]$$

$m = \text{amplitud}$

$k = \text{fase}$



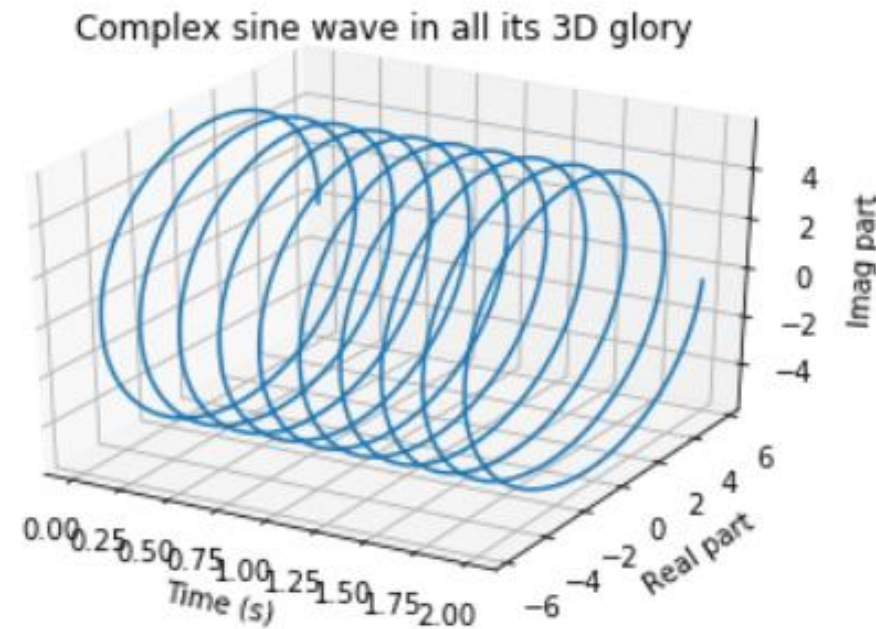
4.1.4 Señales senoidales complejas

$$x(n) = (2f\pi t + \phi)$$

$$me^{-ik} = m[\cos(k) + i \sin(k)]$$

$$K = (2f\pi t + \phi)$$

$$me^{-i2f\pi t}$$



4.1.5 Producto punto

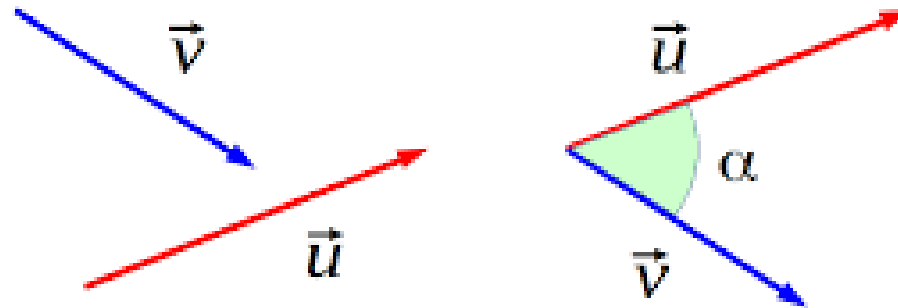
Álgebra: Producto Punto es cuando multiplicamos dos vectores y nuestro resultado es un **escalar**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = 1*0 + 3*8 + 0*1 + 5*6 = 54$$

4.1.5 Producto punto

Interpretación geométrica del **producto punto**. El **producto** de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

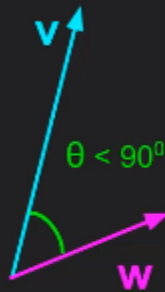
Producto escalar de dos vectores



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

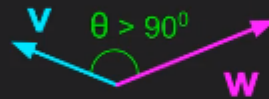
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

4.1.5 Producto punto



$$d = |v||w|\cos(\theta)$$

$$d > 0$$



$$d = |v||w|\cos(\theta)$$

$$d < 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 6 + 1 + 1 + 6 = 14$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = -6 - 1 - 1 - 6 = -14$$

4.1.5 Producto punto

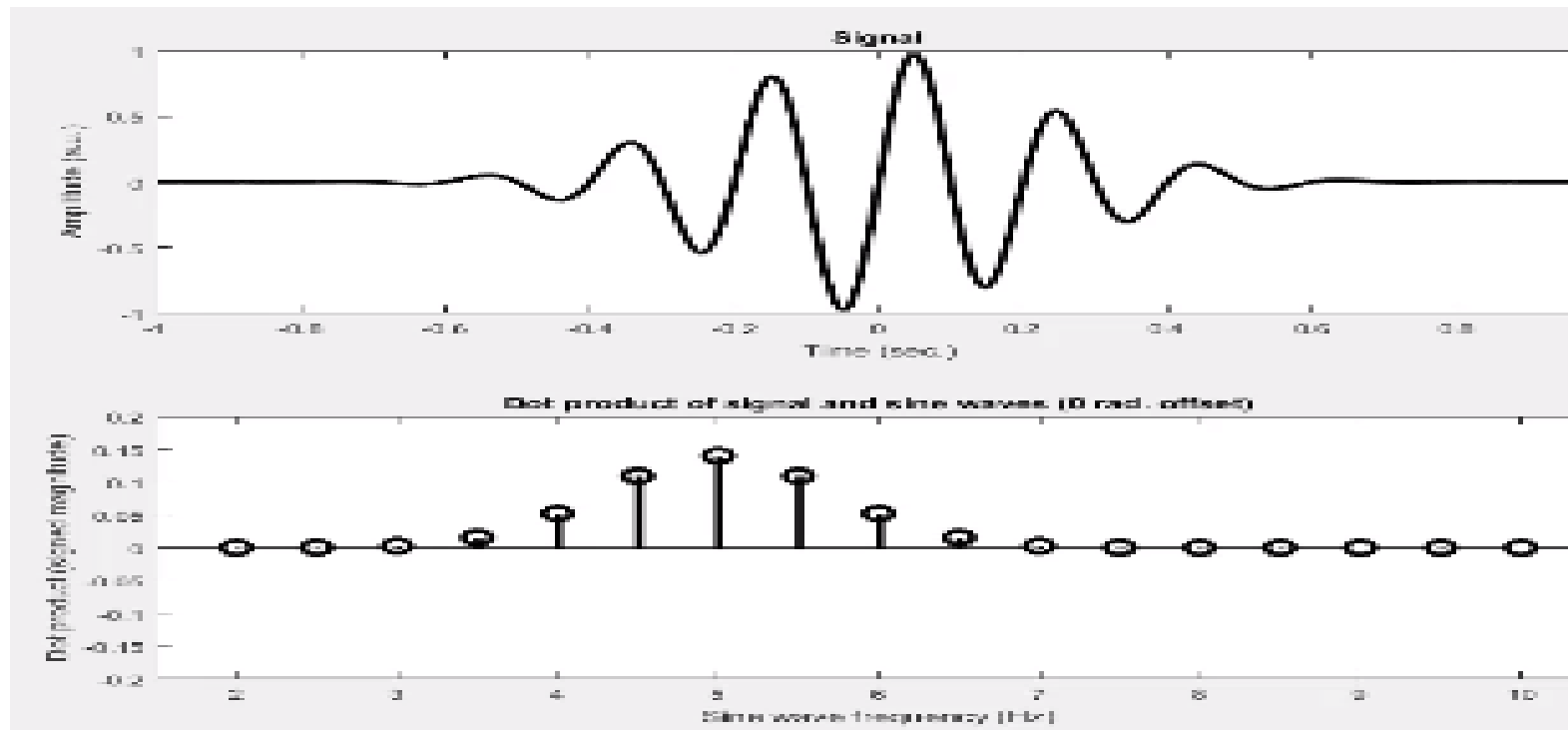
Correlación: relación entre dos variables

Materias matriculadas	Satisfacción
1	10
7	85
5	35
1	15
4	55
0	5
6	72

Correlación: 0,85

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (\text{Eq.3})$$

4.1.5 Producto punto



4.2 Transformada de Fourier

Transformar señales entre el dominio del tiempo (o espacial) y el dominio de la frecuencia. Para ello, Las condiciones que una determinada función $f(x)$ debe cumplir para poder ser representada como una serie de Fourier, se conocen con el nombre de condiciones de Dirichlet¹ las cuales pueden ser esquematizadas en los siguientes puntos. Para que una función $f(x)$ sea susceptible de ser expandida en series de Fourier debe ser:

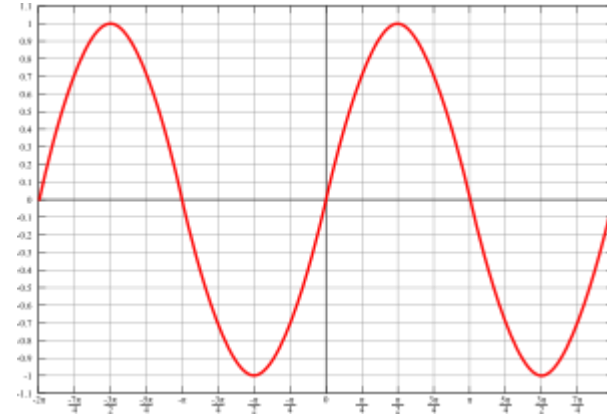
- Periódica
- Univaluada y continua a trozos
- La integral de $f(x)$ debe ser convergente (absolutamente integrable y su valor sea menor que infinito)
- $x(t) \rightarrow X(f)$

4.2 Transformada de Fourier

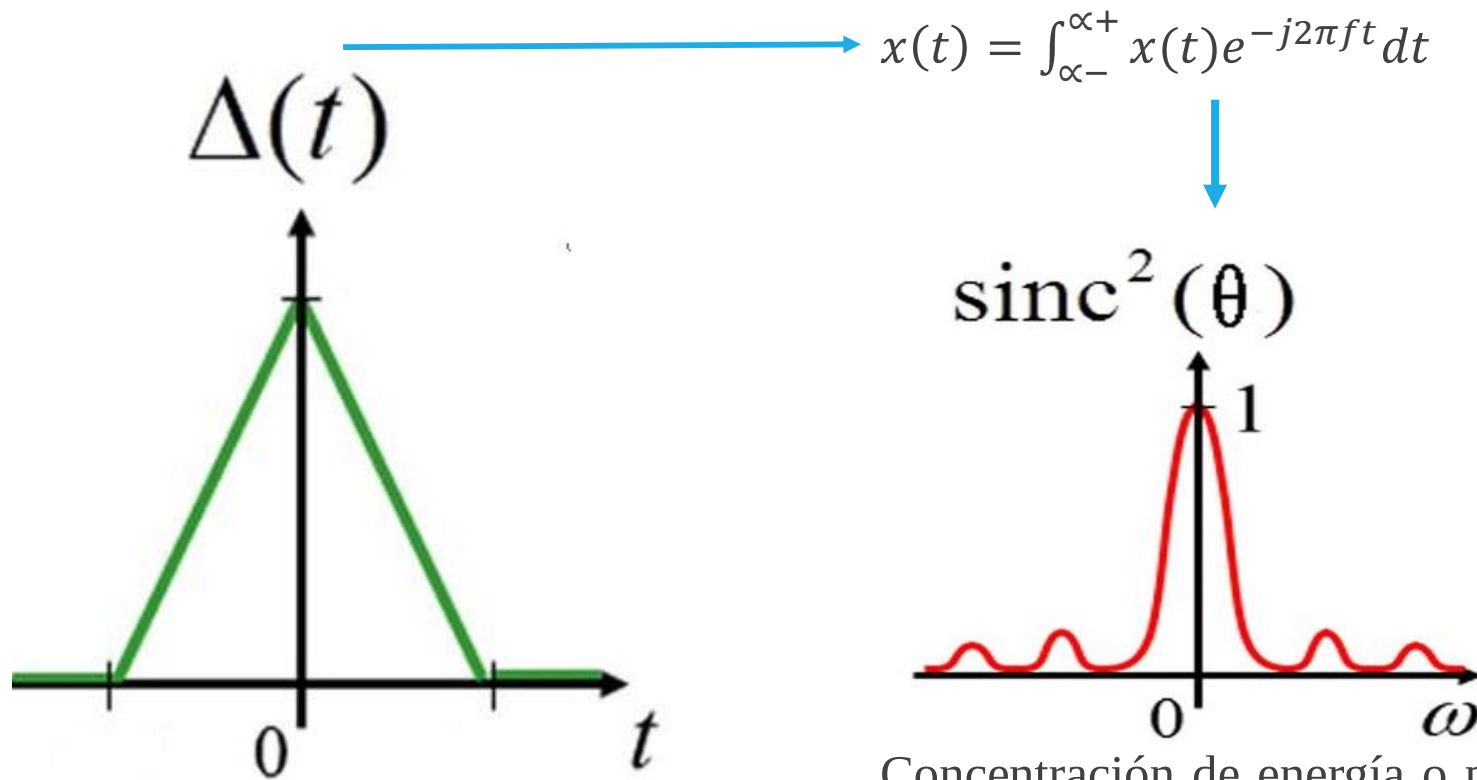
Periodo= El tiempo que oscila una señal

Frecuencia= Las veces que oscila una señal en una unidad de tiempo.

El periodo es inverso a la frecuencia.



4.2 Transformada de Fourier



Concentración de energía o potencia en relación a sus cambios en el tiempo (frecuencia)

4.3 Tipos Transformada de Fourier

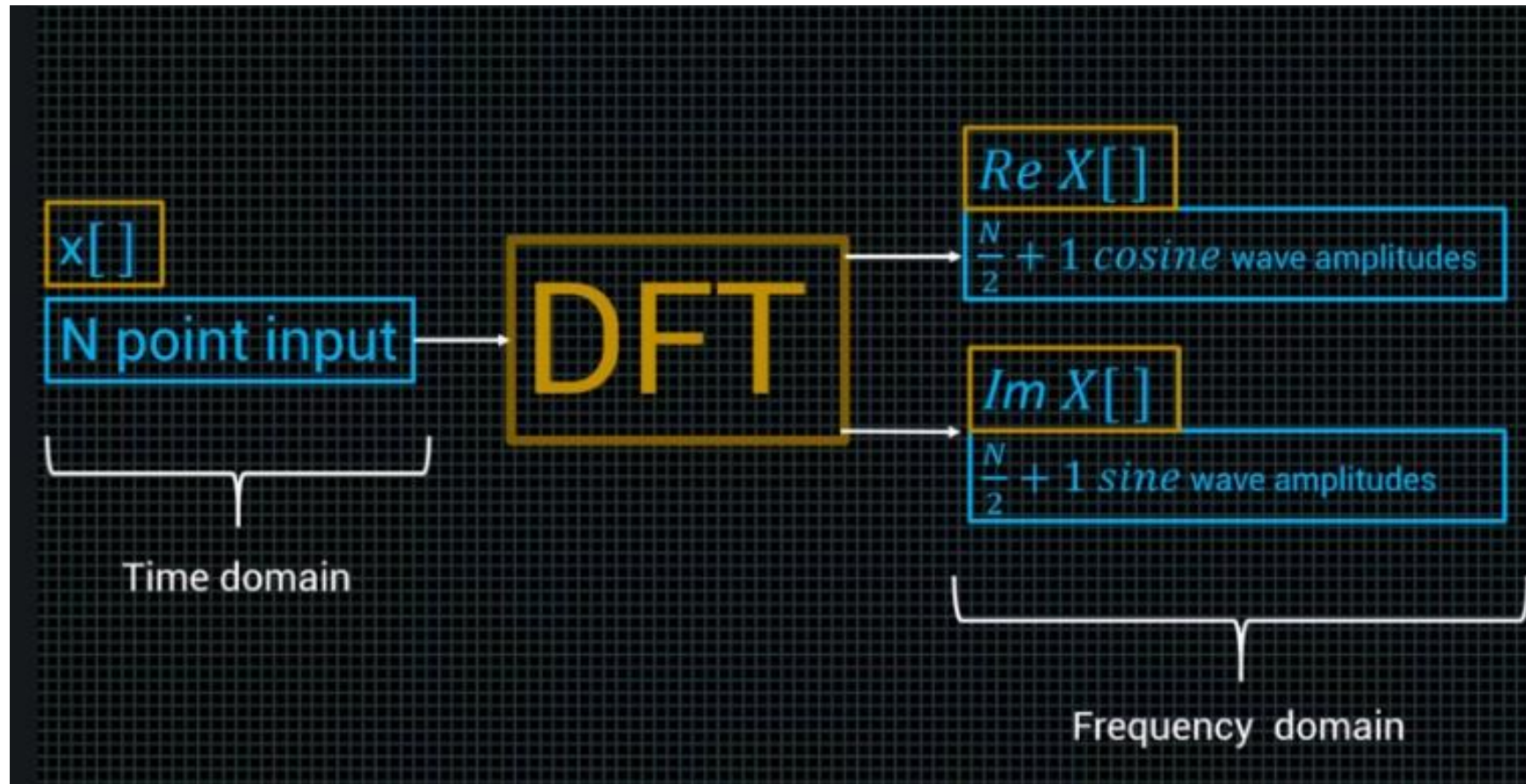
Periódicas discretas $\rightarrow$ Transformada discreta de Fourier

Periódicas y continuas $\rightarrow$ Series de Fourier

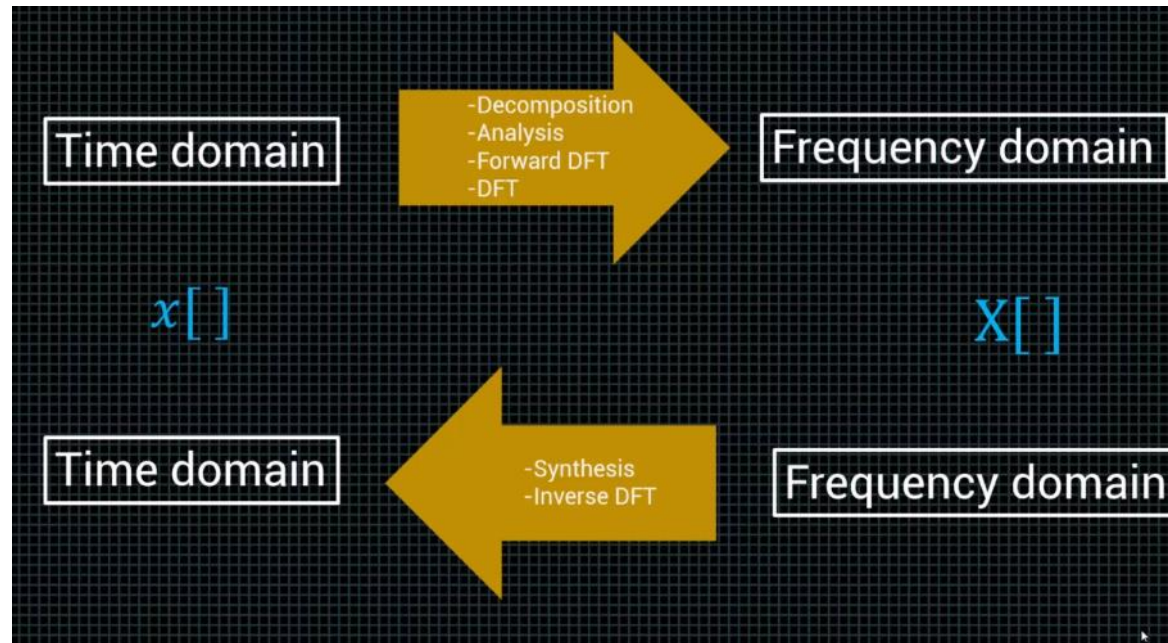
Aperiódicas y continuas $\rightarrow$ Transformada de Fourier

Aperiódica y discreta $\rightarrow$ Transformada discreta de tiempo de Fourier

4.4 Transformada Discreta de Fourier (DFT)



4.4.1 Transformada Discreta de Fourier



4.4.2 Cálculos de DFT

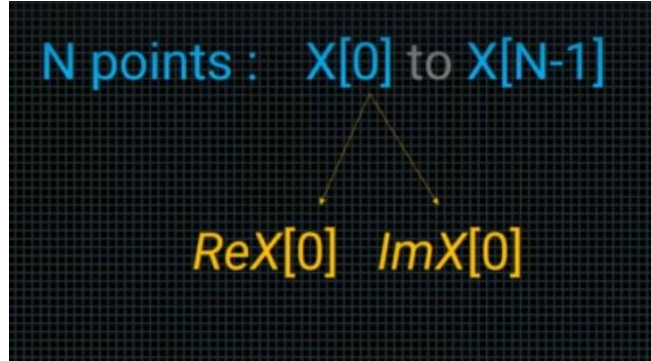
- **Simultaneous equations**
- **Correlation**
- **FFT**

4.4.3 Ecuaciones DFT

$$\operatorname{Re} X[k] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \cos\left(\frac{2\pi ki}{N}\right)$$

$$\operatorname{Im} X[k] = - \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \sin\left(\frac{2\pi ki}{N}\right)$$

4.5 Transformada Rápida de Fourier



- Convertir cada punto del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.
- Calcular el espectro de la frecuencia correspondiente a cada muestra de tiempo
- Unir cada espectro a un solo.

4.5 Transformada de Fourier 2D

$$F(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2\pi i (\frac{x}{M}m + \frac{y}{N}n)),$$

La región rectangular $M \times N$ definida para (m, n) se llama **dominio de frecuencias**, y los valores de $F(m, n)$ se llaman **coeficientes de Fourier**.

La **Transformada Inversa Discreta de Fourier** viene dada por

$$f(x, y) = MN \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(m, n) \exp(2\pi i (\frac{m}{M}x + \frac{n}{N}y)),$$



